

Gli strumenti derivati per la gestione dei rischi finanziari in  
azienda: profili gestionali – quantitativi - giuridici - contabili

# COMPONENTI MATEMATICHE ALLA BASE DEL VALORE DEI DERIVATI

Marina RESTA

# Timeline

- Motivazione
- Pricing di strumenti lineari
- Pricing di strumenti non lineari

# Rilevanza dei derivati sui mercati finanziari

	Forward	Futures	Options	Swap	Cap, Floor, Collar
Stock		X	X		
Bond		X	X		
Interest rates	X	X	X	X	X
Exchange rates (currencies)	X	X	X	X	
Stock indexes		X	X		
Commodities	X	X	X	X	
Credit	X		X	X	
Weather	X	X	X		

- Forward
- Forward Rate Agreement
- Swap
- Futures
- Options
- Caps, Floor, Collar

Fonte. Eales, Choudhry (2003) Derivative Instruments: a guide to theory and practice



Università degli Studi di Genova  
Dipartimento di Economia



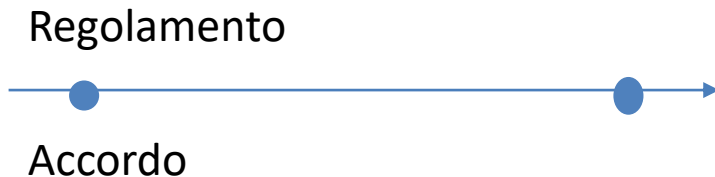
M. Resta: Componenti matematiche alla base del valore dei derivati

# I contratti forward

## Definizione

Un forward o “contratto a termine” può essere definito come una compravendita nella quale vi è la presenza di un gap temporale tra il momento dell'accordo ed il momento del regolamento

### Negoziazione a pronti



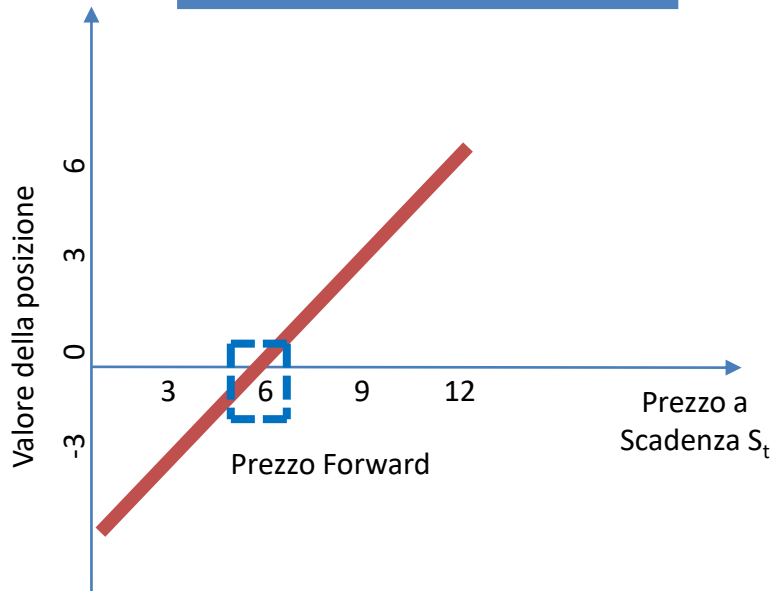
### Negoziazione a termine (forward)



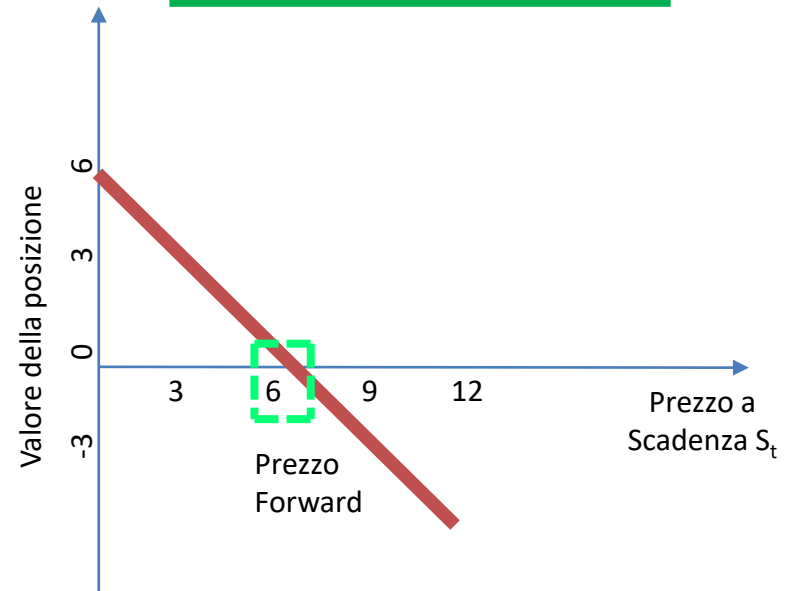
# Payoff

I forward sono strumenti SIMMETRICI e LINEARI

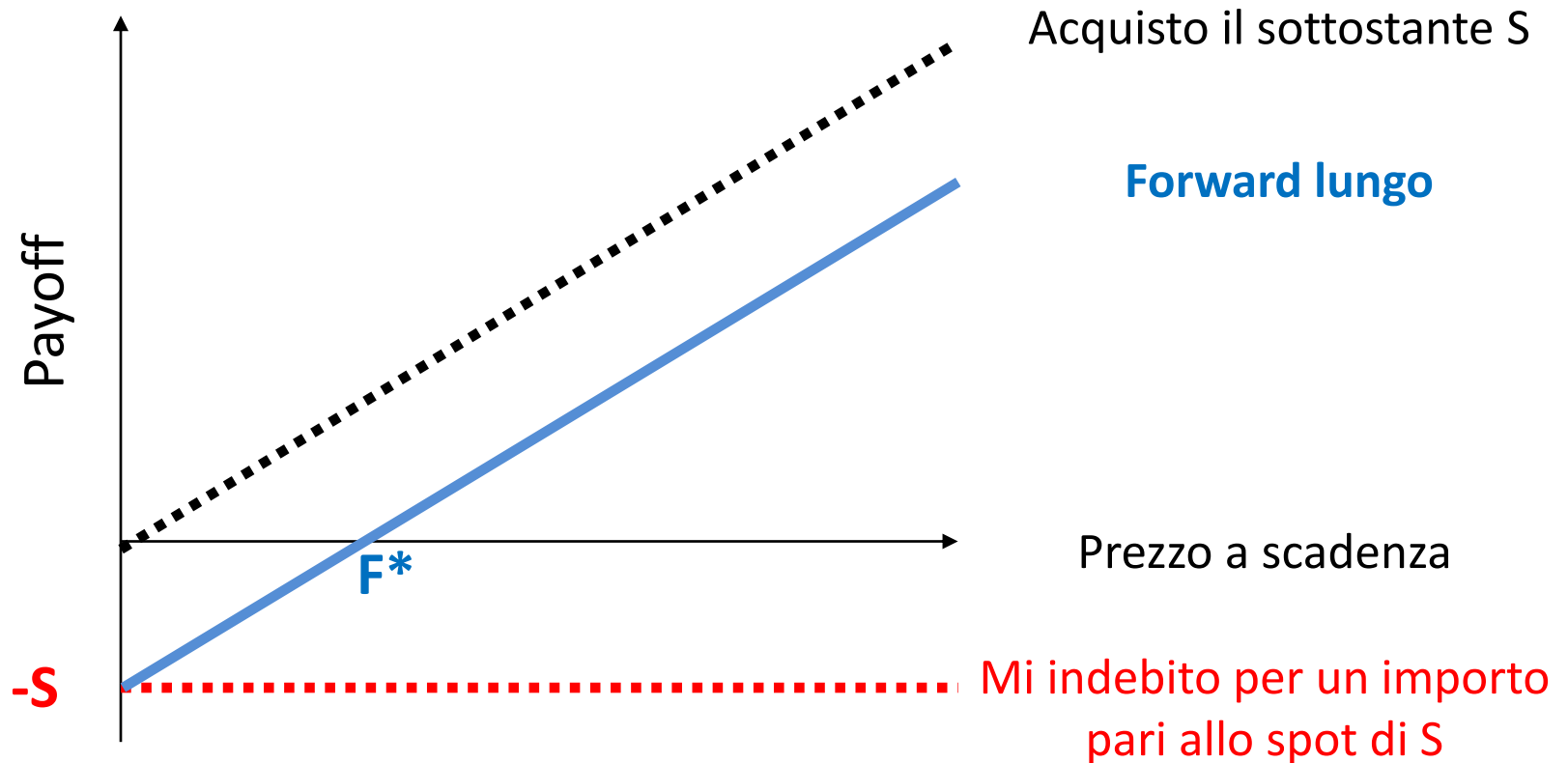
Long su forward



Short su forward



# Pricing



Università degli Studi di Genova  
**Dipartimento  
di Economia**



**M. Resta: Componenti matematiche alla base del valore dei derivati**

# Pricing (II)

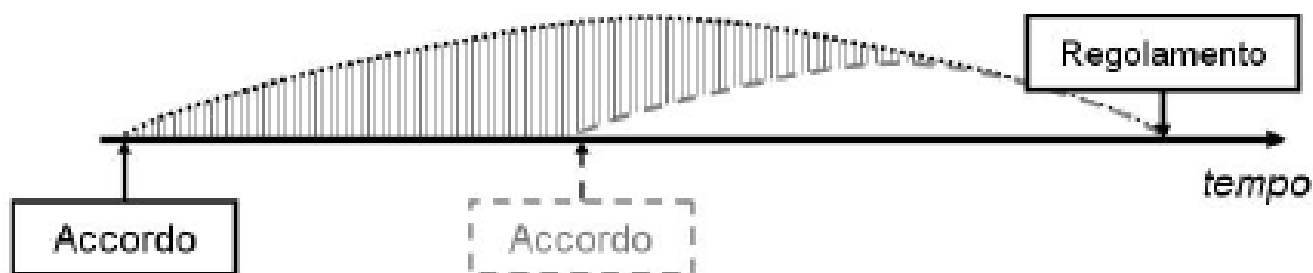
Operazione	Flussi Istante Iniziale	Flussi a scadenza
Acquisto del sottostante	$-S$	$0$
Indebitamento	$+S$	$-S e^{rT}$
Vendita del sottostante (forward)	$0$	$+F^*$
<b>Somma Flussi</b>	<b>0</b>	<b><math>F^* - S e^{rT}</math></b>

Operazione	Flussi Istante Iniziale	Flussi a scadenza
Vendita del sottostante	$S$	$0$
Investimento	$-S$	$+S e^{rT}$
Acquisto del sottostante (forward)	$0$	$-F^*$
<b>Somma Flussi</b>	<b>0</b>	<b><math>-F^* + S e^{rT}</math></b>

$$F^* = S e^{rT}$$

# Valore di mercato

Oltre alla conoscenza del prezzo equo di un forward al momento della stipula, può essere necessario effettuare una valutazione del forward durante la vita del contratto.



- Sottostante (cosa viene scambiato)
- Quantità (quanto viene scambiato)
- Prezzo



Università degli Studi di Genova  
**Dipartimento  
di Economia**



**M. Resta: Componenti matematiche alla base del valore dei derivati**



# Valore di mercato: regole da memorizzare e calcolo

1	Il prezzo forward del contratto originario oggetto di valutazione $F_{0,T}$ ed il prezzo forward al momento $t$ della valutazione $F_{t,T}$ non si riferiscono al medesimo istante
2	E' necessario ricondurre i flussi finanziari dei due forward al periodo $t$ nel quale si sta compiendo la valutazione.
3	Ambedue i forward (valutato e quello ipotizzato) produrranno i loro effetti solo il giorno del regolamento, ossia in $T$ .

Long

$$W = (F_{t,T} - F_{0,T}) \times e^{-r \times (T-t)}$$

Short

$$W = (F_{0,T} - F_{t,T}) \times e^{-r \times (T-t)}$$



Università degli Studi di Genova  
Dipartimento  
di Economia



M. Resta: Componenti matematiche alla base del valore dei derivati

# Valore di mercato: un esempio

In data 1/1/2016 due soggetti si sono accordati per scambiarsi una certa quantità di un'attività che non paga flussi intermedi. Il regolamento avverrà in data 1/1/2017. Il prezzo  $F_{0;T}$  fissato nel contratto è pari a 24€ per ogni unità di sottostante.

Si procede al calcolo del valore del forward per il soggetto con posizione lunga in data 1/8/2016, sapendo che il prezzo spot del sottostante a tale data è pari a 25€ e che la curva dei rendimenti è piatta e pari al 10%.

Per valutare il forward è dunque necessario calcolare il prezzo forward a tale data. Da  $F = Se^{r(T-t)}$  si ottiene:

$$F_{t;T} = F_{7/12;12/12} = 25 e^{0.1 \times 5/12} = 26.063 \text{ €}.$$

Sapendo che il valore del forward per la posizione lunga (acquirente a termine) è pari a:

$$W = (F_{t;T} - F_{0;T})e^{-r(T-t)}$$

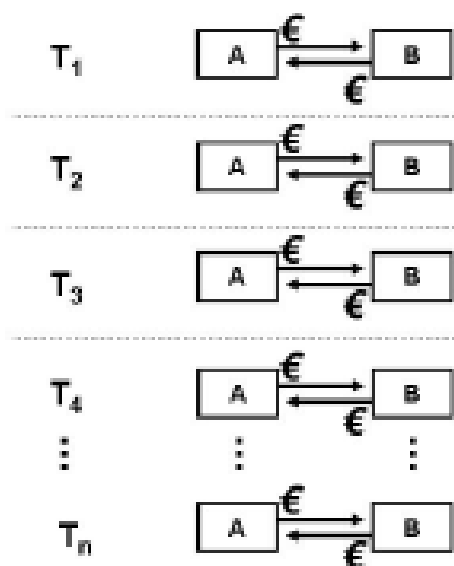
il valore del forward per l'acquirente sarà:

$$W = (F_{7/12;12/12} - F_{0;12/12})e^{-0.1 \times 5/12} = (26.063 - 24)e^{-0.1 \times 5/12} = 1.978 \text{ €}$$

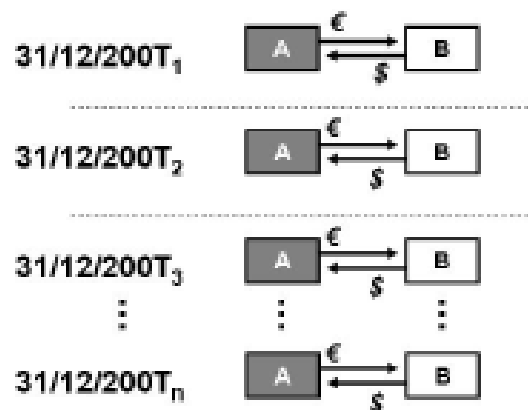
# Gli swap

## Definizione

Uno swap è un contratto nel quale due parti si accordano per scambiarsi, in date future prestabilite, dei flussi finanziari calcolati sulla base di un capitale nozionale di riferimento



Gli swap hanno una natura multi-periodale



# Tipologie di swap

## Interest Rate Swap (IRS) *plain vanilla* o «fisso vs variabile»

Due soggetti si accordano definendo un capitale nozionale, una serie di date future e due tassi di interesse, di cui uno fisso e l'altro variabile. Le parti dello swap si impegnano a scambiarsi, in ognuna delle date future, flussi finanziari pari agli interessi periodali calcolati in base al capitale nozionale

## Basis Swap

Le parti si accordano per scambiarsi flussi periodali entrambi legati a tassi variabili (ovviamente) differenti

## Amortizing swap

Il capitale nozionale si riduce progressivamente secondo un piano di ammortamento noto

## Step up

Il capitale nozionale aumenta nel tempo

## Forward swap

Le parti si accordano in via immediata per dar vita ad uno swap che prevede lo scambio di flussi solo a partire da una data futura

...swaptions

# Pricing

Definire il pricing di un interest rate swap implica la determinazione del valore del tasso fisso del contratto

L'unico modo per chiudere uno swap in modo ragionevole è definire un tasso fisso tale per cui il valore attuale dei flussi futuri calcolato in base al tasso fisso eguagli il valore attuale dei flussi futuri calcolato in base ai tassi variabili attesi (tassi forward)

$$R_{fix\_swap} = \frac{1 - \frac{1}{(1 + r_{0;n})^{T_n}}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + r_{0;i})^{T_i}}}$$

# Valore di mercato

Lo swap è visto come combinazione di due diverse obbligazioni (bond): una a tasso variabile (“gamba variabile” dello swap), e l'altra a tasso fisso, (“gamba fissa” dello swap).

Il valore dello swap è dato dalla differenza tra il valore attuale (prezzo) del bond a tasso fisso ed il valore attuale (prezzo) del bond a tasso variabile.

$$B_{fix} = \sum_{i=1}^n \frac{k_{fix}}{(1+r_i)^{T_i}} + \frac{L}{(1+r_n)^{T_n}}$$

$k_{fix}$  = flusso monetario relativo agli interessi periodali calcolati in base al tasso fisso;  
 $r_i$  = tassi di mercato relativi alle scadenze  $i$ ;  
 $L$  = capitale nozionale dello swap;  
 $T_i$  = tempo intercorrente tra la data di valutazione e la  $i$ -esima data di scambio (residua).

$$B_{var} = \sum_{i=1}^n \frac{k_{var}}{(1+r_i)^{T_i}} + \frac{L}{(1+r_n)^{T_n}}$$

$k_{var}$  = flusso monetario relativo agli interessi periodali calcolati in base al tasso variabile;  
 $r_i$  = tassi di mercato relativi alle scadenze  $i$ ;  
 $L$  = capitale nozionale dello swap;  
 $T_i$  = tempo intercorrente tra la data di valutazione e la  $i$ -esima data di scambio (residua).



Università degli Studi di Genova

Dipartimento  
di Economia



M. Resta: Componenti matematiche alla base del valore dei derivati

# Esempio

Si ipotizzi un IRS scritto su un capitale nozionale di 100.000.000€ che prevede pagamenti semestrali in cui un tasso fisso dell'8% annuo viene scambiato con il Libor 6 mesi. Ipotizzando che lo swap abbia una vita residua di 1 anno e 3 mesi, che i tassi Libor presentino la seguente struttura

## Scadenza Tasso

3 mesi 10%

9 mesi 10,50%

15 mesi 11%

Il Libor 6-mesi alla data dell'ultimo pagamento era pari al 10,20%, si procede ad calcolare il valore dello swap per il floating rate payer.

Si procede al calcolo del valore di mercato dei due bond fittizi.

$$B_{fx} = \frac{4.000.000}{(1+0,10)^{0,25}} + \frac{4.000.000}{(1+0,105)^{0,75}} + \frac{104.000.000}{(1+0,11)^{1,25}} = 98.898.000 \text{ €}$$

$$B_{var} = \frac{\left[ 100.000.000 + \left( \frac{0,102}{2} \right) \times 100.000.000 \right]}{(1+0,10)^{0,25}} = 102.625.000 \text{ €}$$

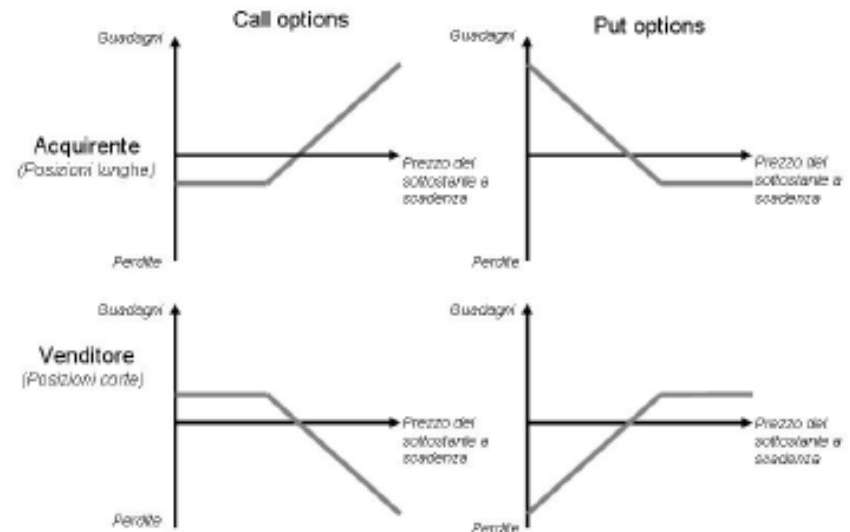
$$V = 98.898.000 - 102.625.000 = -3.727.000 \text{ €}$$

# Le opzioni

## Definizione

Le opzioni, rispetto ad altri derivati (forward, future, swap) sono contratti asimmetrici. Le modalità con le quali evolvono i guadagni sono infatti diverse da quelle delle perdite.

Posizione	Diritto/Obbligo previsto
Long Call	Diritto ad acquistare il sottostante
Short Call	Ha venduto alla controparte il diritto di acquistare il sottostante (obbligo di vendere il sottostante)
Long Put	Diritto a vendere il sottostante
Short Put	Ha venduto alla controparte il diritto di vendere il sottostante (obbligo di comprare il sottostante)





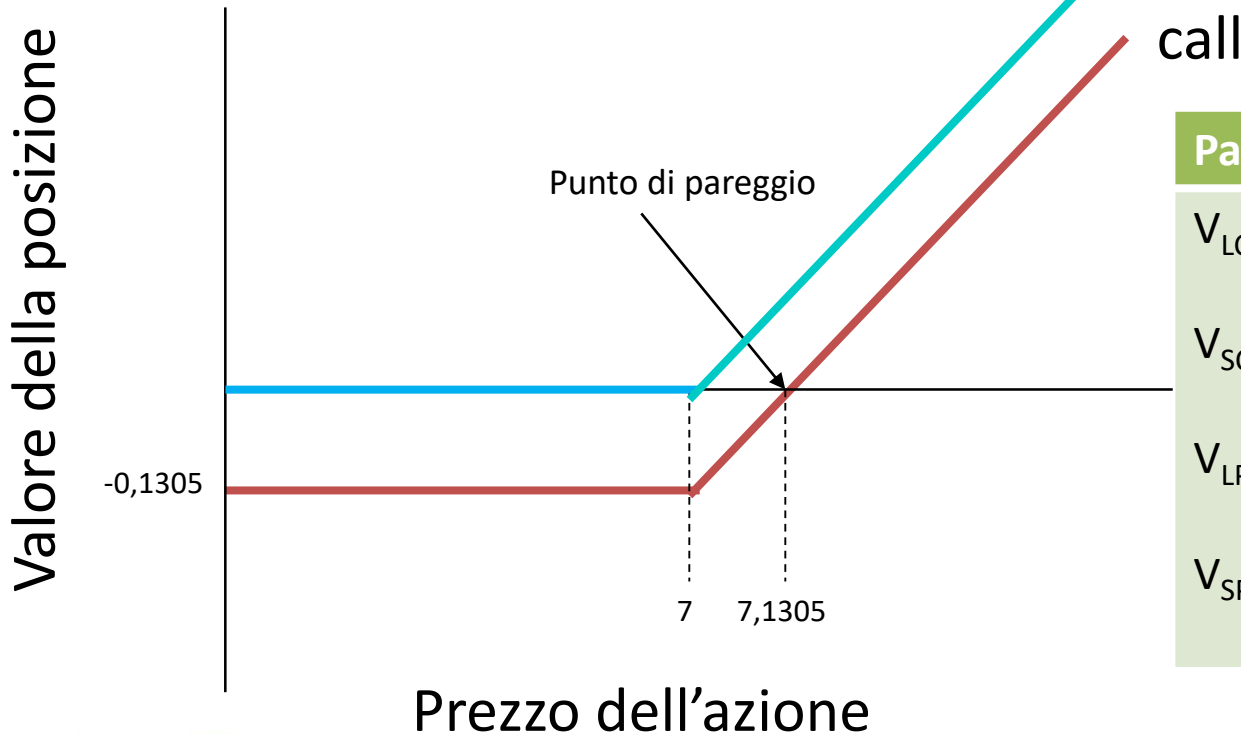
# Le opzioni

## Esempio

**Profitto per l'acquirente di una call**  
prezzo di esercizio a € 7 e prezzo dell'opzione € 0,1305

## Definizione

Le opzioni, rispetto ad altri derivati (forward, future, swap) sono contratti asimmetrici. Le modalità con le quali evolvono i guadagni sono infatti diverse da quelle delle perdite.



## Payoff

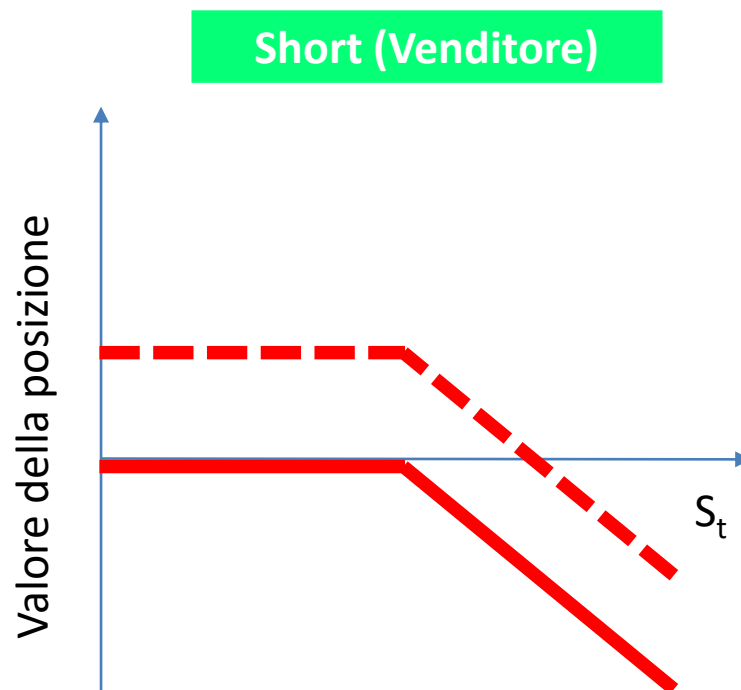
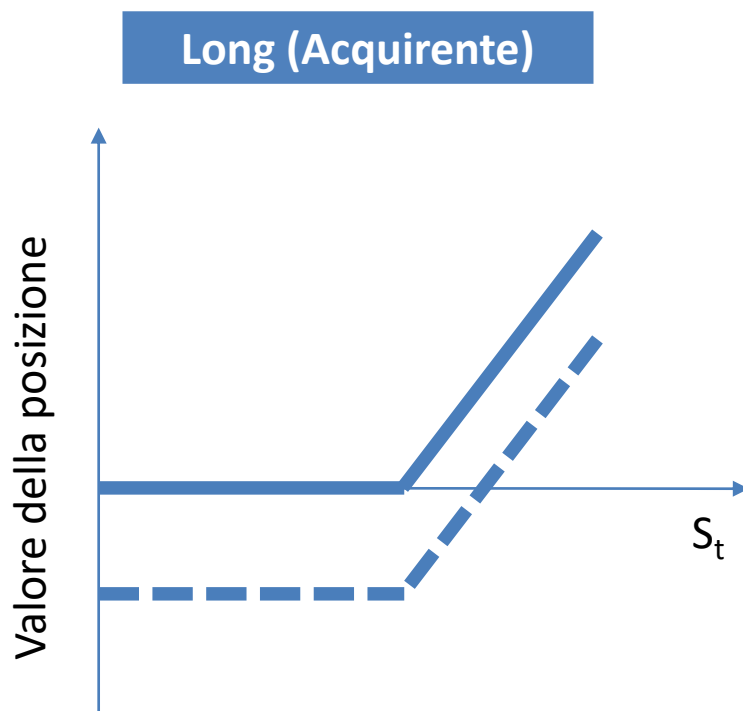
$$V_{LC} = \max(S - K, 0)$$

$$V_{SC} = -\max(S - K, 0)$$

$$V_{LP} = \max(K - S, 0)$$

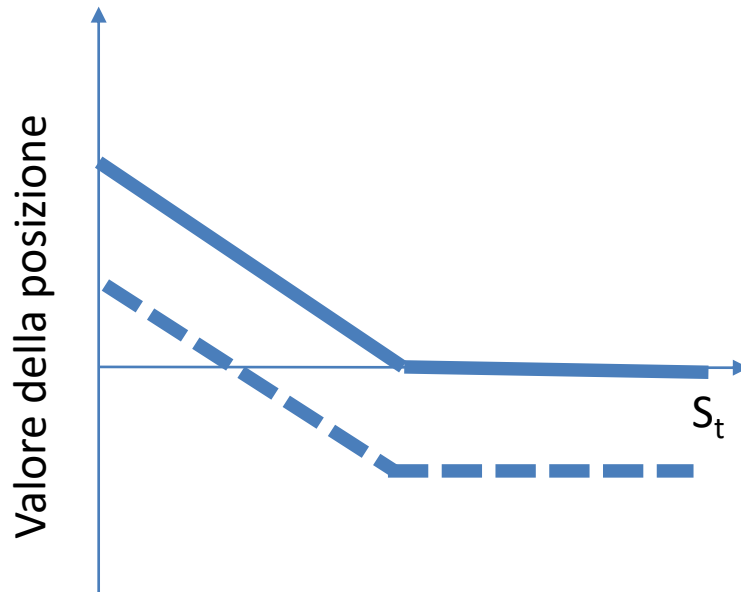
$$V_{SP} = -\max(K - S, 0)$$

# Profitti su Call

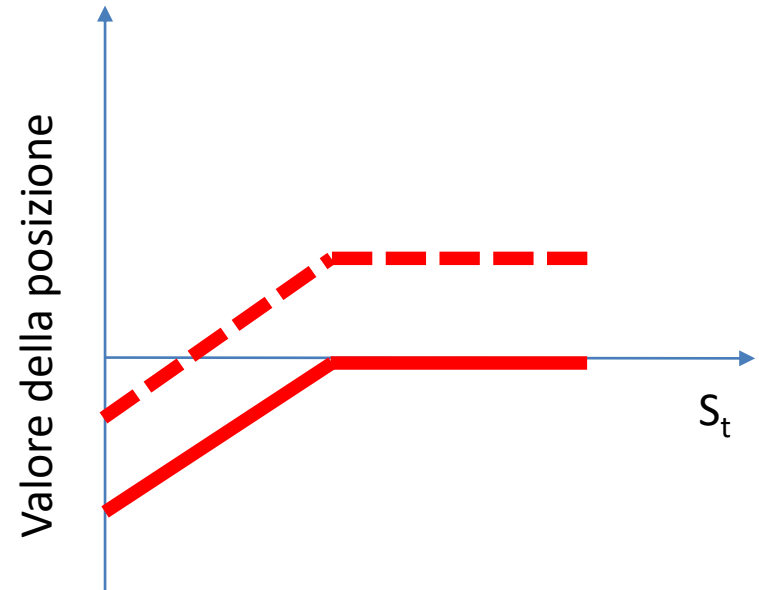


# Profitti su Put

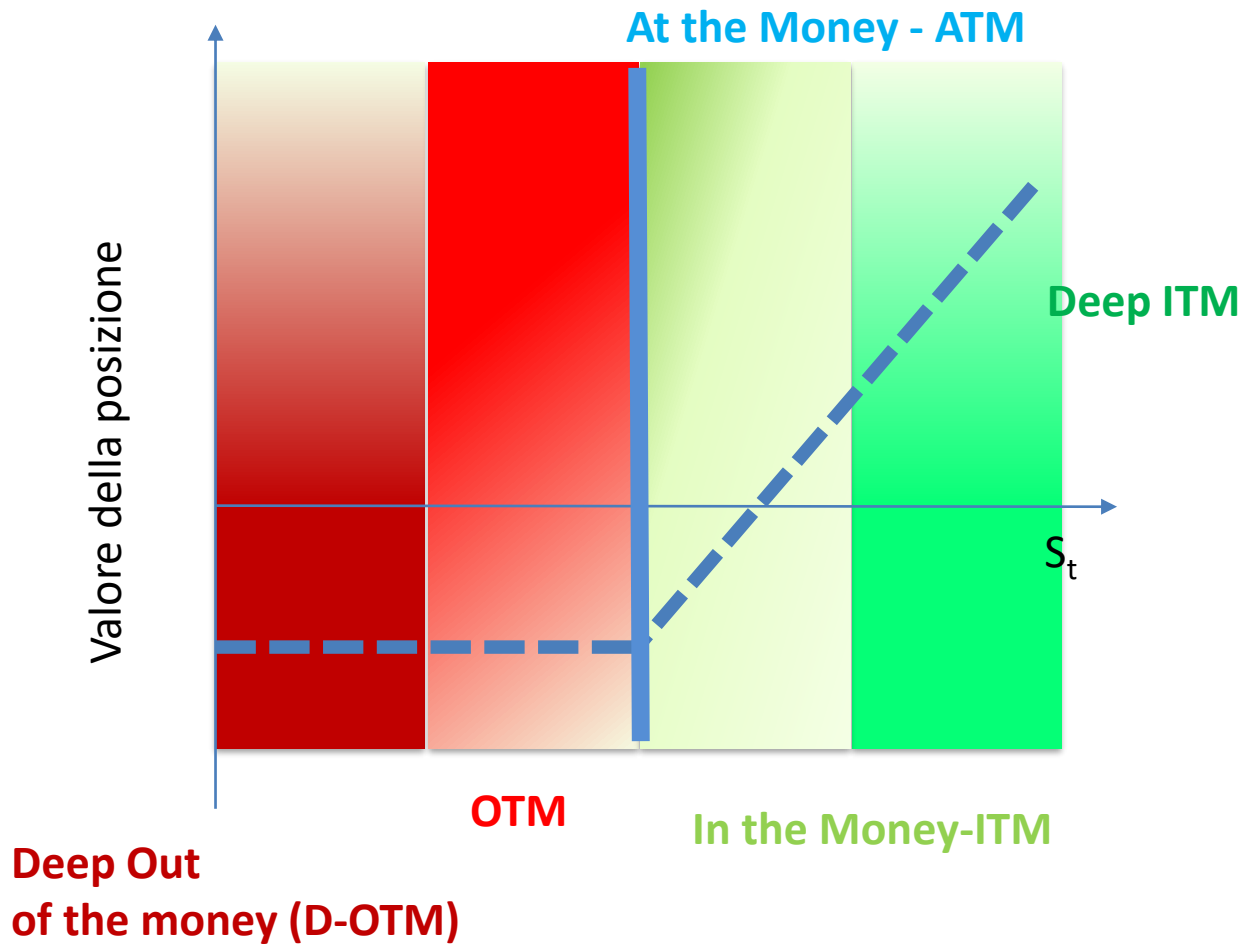
Long (Acquirente)



Short (Venditore)



# Moneyiness



# Valore minimo di una Call

Chi ha una call su un titolo ed ha il denaro necessario per esercitarla (cioè per pagare il premio pattuito) si trova in una situazione migliore rispetto a chi ha già in portafoglio il titolo.

**K>S**

Il titolare dell'opzione non potrà esercitare l'opzione perdendo solo il premio

Chi detiene in portafoglio il titolo sarà penalizzato dall'andamento sfavorevole del corso azionario

**K<S**

Il titolare dell'opzione eserciterà l'opzione

Il detentore del titolo usufruirà dell'aumento di valore

Si può così affermare che, definiti due portafogli:

A) Call + denaro;

B) Sottostante;

il portafoglio A deve valere più del portafoglio B:

Call + denaro > Sottostante

$$c + Ke^{-r(T-t)} > S$$

$$c > S - Ke^{-r(T-t)}$$

# Valore minimo di una Put

Chi ha una posizione lunga su una Put ed ha in portafoglio il relativo sottostante gode di una posizione di privilegio rispetto a chi è in possesso di una somma di denaro pari allo strike price  $K$  della put il giorno della scadenza.

**$K > S$**

Il titolare dell'opzione la eserciterà

Chi detiene  $K$  non è influenzato dal prezzo del sottostante

**$K < S$**

Il titolare dell'opzione NON eserciterà l'opzione e il valore del portafoglio sarà pari al valore di mercato  $S$  del sottostante.

Il valore del portafoglio di chi detiene  $K$  è pari a  $K < S$

Si può così affermare che, definiti due portafogli:

C) Put + Sottostante;

D) Denaro;

il portafoglio C deve valere più del portafoglio D:

Put + Sottostante > Denaro

$$p + S > Ke^{-r(T-t)}$$

$$p > Ke^{-r(T-t)} - S$$

# Prime Conclusioni

Tipo	Limite Inferiore del premio	Limite Superiore del Premio
Call	$c > S - Ke^{-r(T-t)}$	$c \leq S$
Put	$p > Ke^{-r(T-t)} - S$	$p \leq K$



$$V_c = f(S, K, r, T, t, \sigma_S)$$

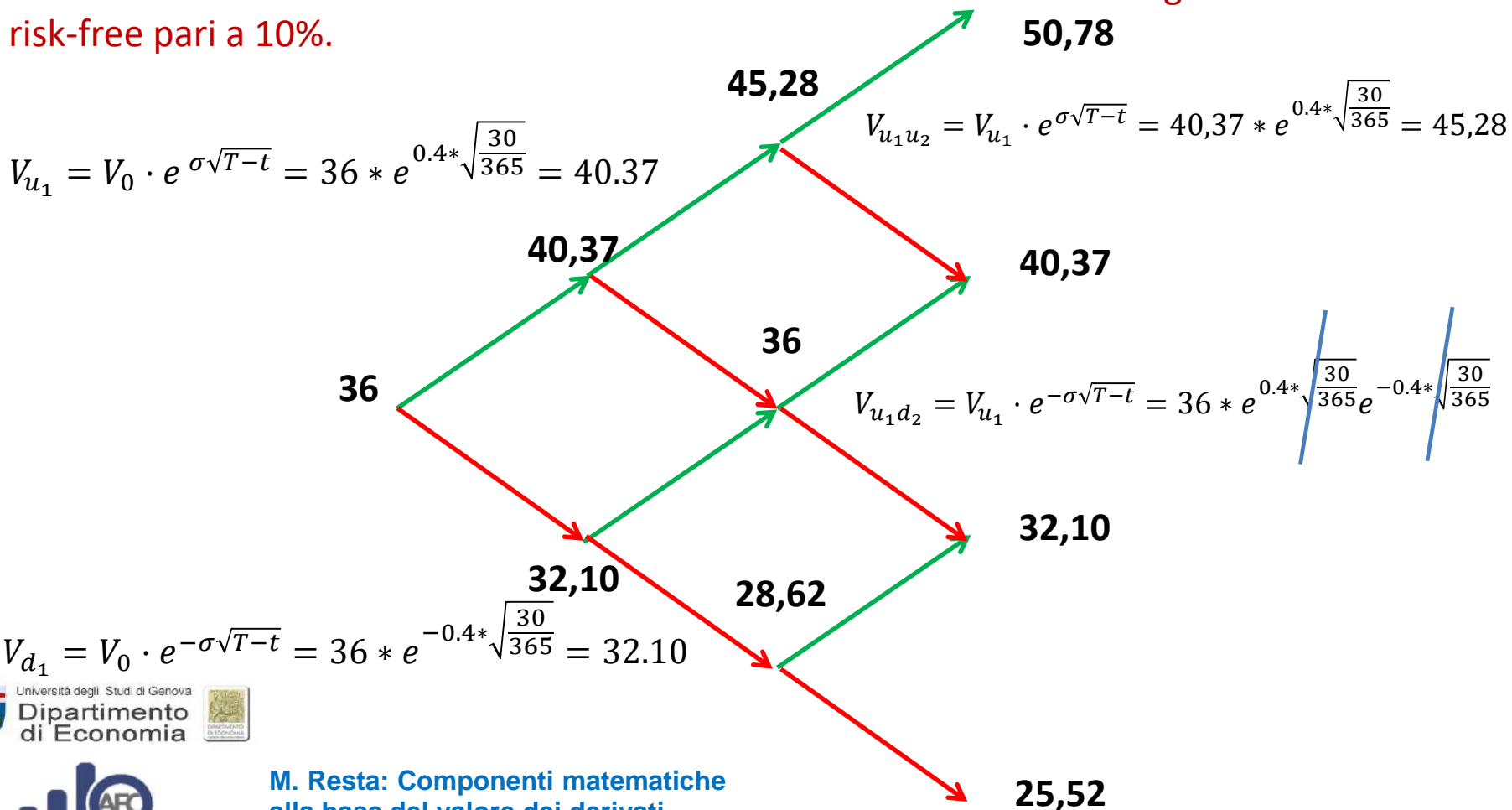
$$V_P = g(S, K, r, T, t, \sigma_S)$$

		Call	Put
Sottostante S	↑ ↓	↑ ↓	↓ ↑
Strike K	↑ ↓	↓ ↑	↑ ↓
Volatilità annua $\sigma$	↑ ↓	↑ ↓	↑ ↓
Time to maturity T-t	↑ ↓	↑ ↓	↑ ↓

## Pricing binomiale tramite un esempio

Un'opzione call sul titolo XYZ ha un prezzo di esercizio di € 40 e scade tra 30 giorni. Il titolo XYZ quota correntemente a € 36 ed ha una volatilità di 0,4.

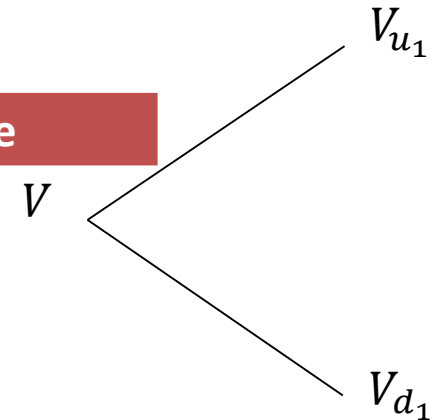
In un mondo di neutralità al rischio il ritorno atteso sul titolo sarebbe uguale al tasso risk-free pari a 10%.





# Generalizzando

## Modello Uniperiodale



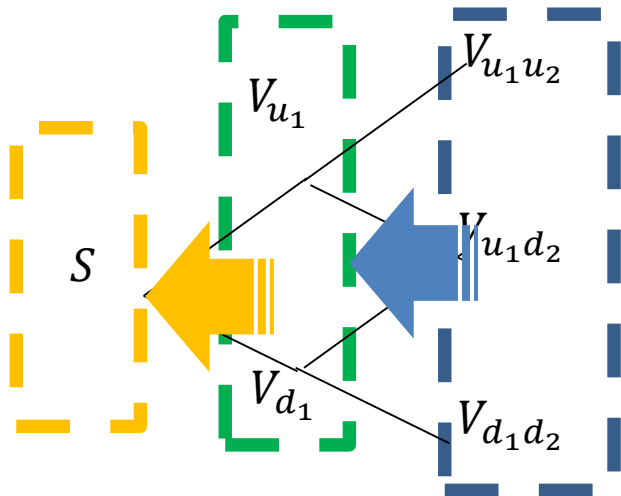
$$V_C = e^{-r(T-t)} [qV_{u_1} + (1-q)V_{d_1}]$$

$$q = \frac{e^{r(T-t)} - e^{-\sigma\sqrt{T-t}}}{e^{\sigma\sqrt{T-t}} - e^{-\sigma\sqrt{T-t}}}$$



$$q = \frac{a - d}{u - d}$$

## Modello bi-periodale



## Backward Induction

Prima si calcolano:

$$V_{u_1} = e^{-r(T-t)} [qV_{u_1 u_2} + (1-q)V_{u_1 d_2}]$$

$$V_{d_1} = e^{-r(T-t)} [qV_{u_1 d_2} + (1-q)V_{d_1 d_2}]$$

E poi:

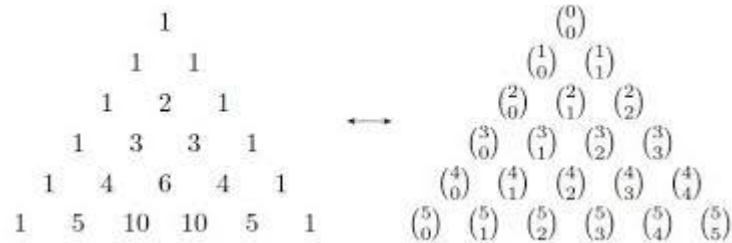
$$\begin{aligned} V_C &= e^{-r(T-t)} [qV_{u_1} + (1-q)V_{d_1}] = \\ &= e^{-2r(T-t)} [q^2 V_{u_1 u_2} + 2q(1-q)V_{u_1 d_2} + (1-q^2)V_{d_1 d_2}] \end{aligned}$$

# Generalizzando



$$V_c = e^{-n \cdot r(T-t)} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} V_j$$

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1) \dots (n-j+1)}{j!}$$



# Ma non è finita qui!!!!!!

$$V_c = e^{-n \cdot r(T-t)} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} V_j$$

$$V_j = \max(0, Su^j d^{n-j} - K) \quad \Rightarrow \quad V_c = e^{-n \cdot r(T-t)} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} (Su^j d^{n-j} - K)$$

$$V_c = e^{-n \cdot r(T-t)} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} (Su^j d^{n-j} - K)$$

Prob. di essere *in the money*  
a scadenza:  $B(n, q)$

$$= S e^{-n \cdot r(T-t)} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} u^j d^{n-j} - K e^{-n \cdot r(T-t)} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j}$$

Prob. di essere *in the money*  
a scadenza:  $B(n, q^*)$

$$\Rightarrow V_c = S B(n, q^*) - K e^{-n \cdot r(T-t)} B(n, q)$$

# Formula di valutazione di Black-Scholes

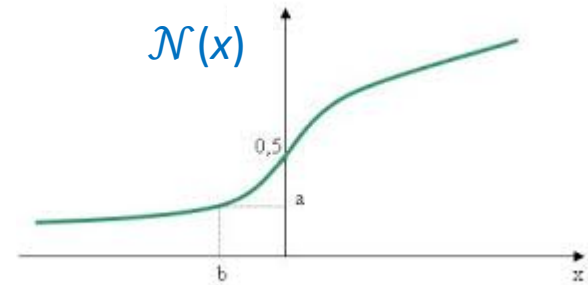
$$V_c = S B(n, q *) - K e^{-n \cdot r(T-t)} B(n, q)$$

Quando:  $T - t \rightarrow 0$

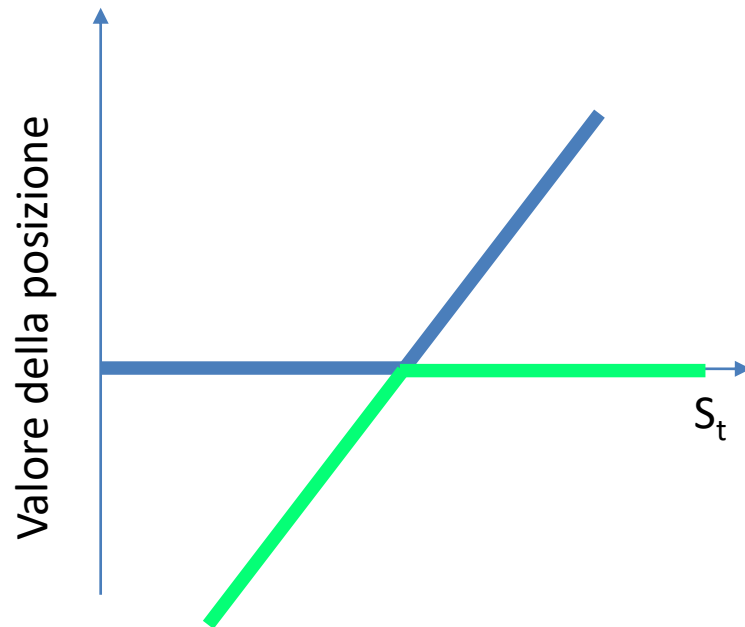
$$V_c = S \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

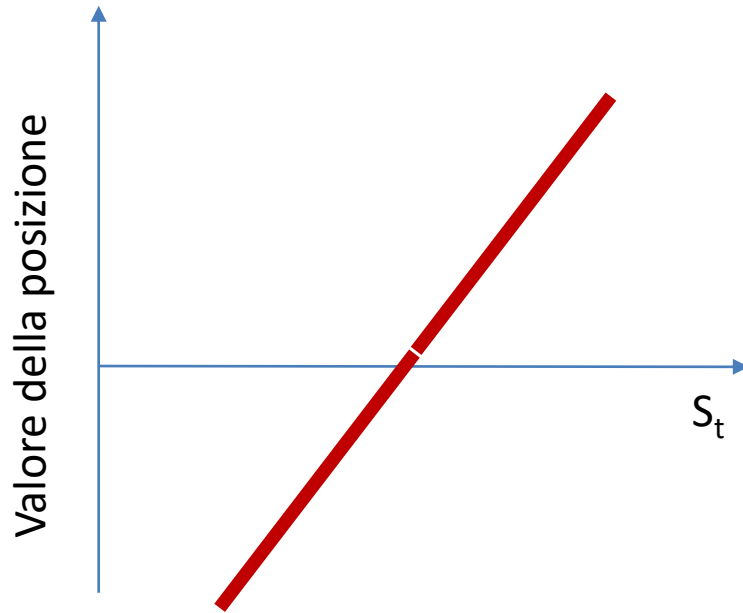


# Parità Call-Put



Combinando una Long su Call e una Short su Put con lo stesso strike price  $K$  il pay-off risultante è quello di un forward

# Parità Call-Put

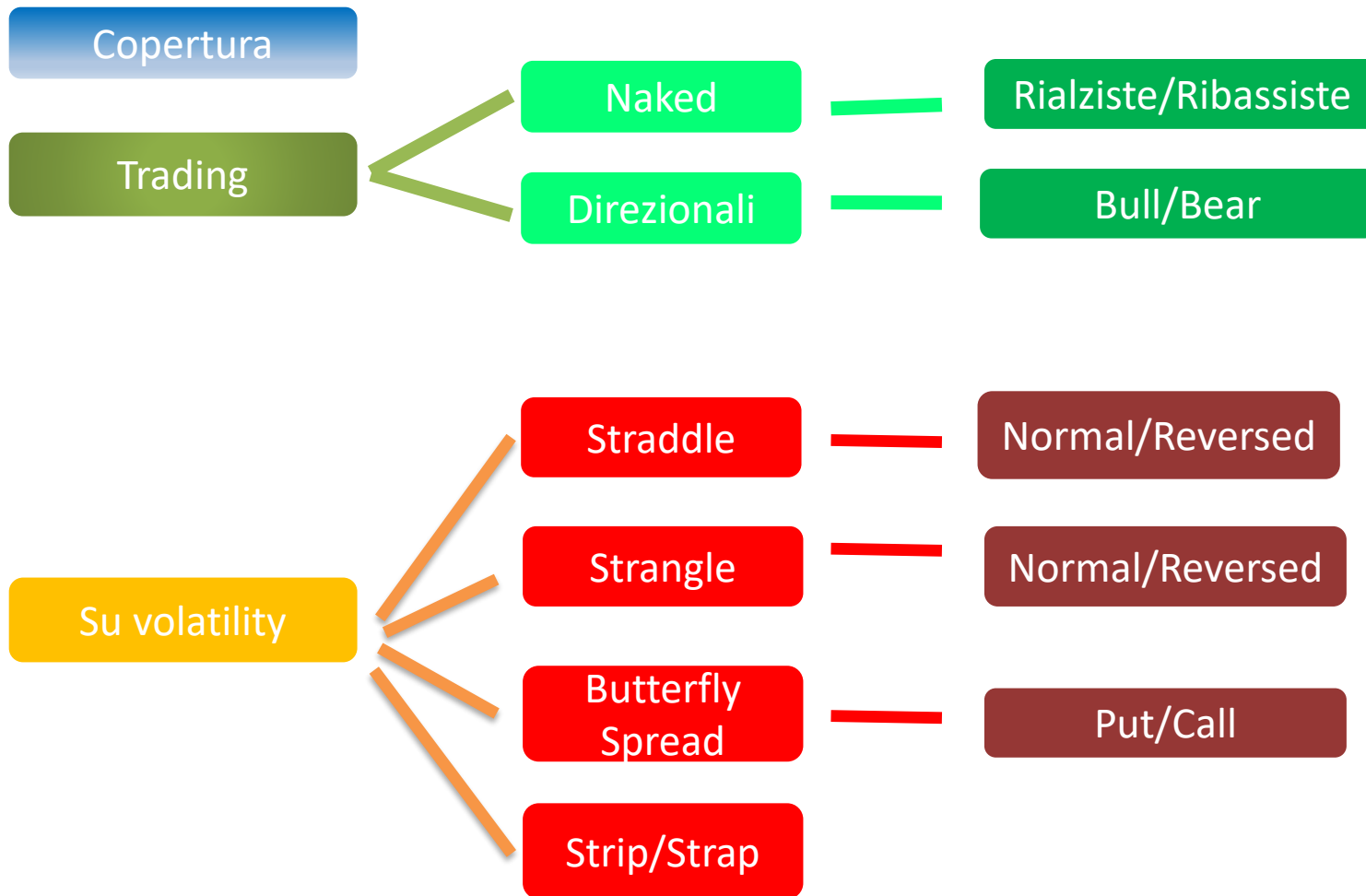


Combinando una Long su Call e una Short su Put con lo stesso strike price  $K$  il pay-off risultante è quello di un forward

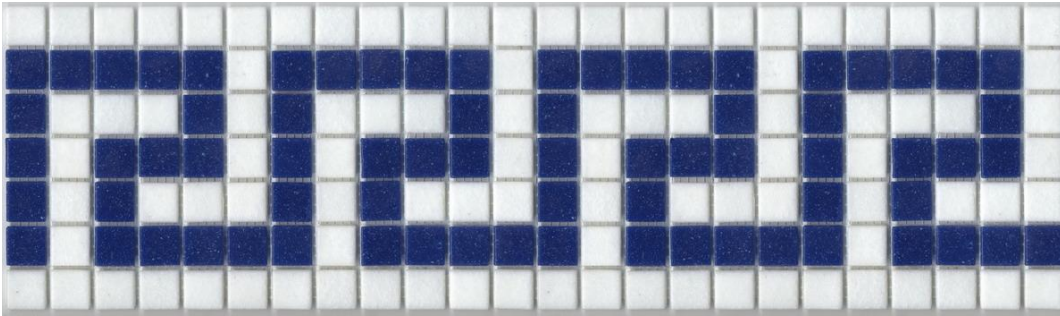
Il costo delle due operazioni (LC+SP e Forward) deve essere identico

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

# Strategie con opzioni



# Le Greche



## Definizione

Le greche sono degli indicatori che servono a comprendere la sensibilità del prezzo dell'opzione al variare di uno dei parametri da cui esso dipende.





# Le Greche

## Delta

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1)$$

## Gamma

$$\Gamma_C = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\mathcal{N}'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

## Rho

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial t} = rKe^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

## Vega o Vomma

$$\mathcal{V}_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t} S \mathcal{N}'(d_1) = \sqrt{T-t} Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}'(d_2)$$

---

## Theta

$$\Theta_C = \frac{\partial C}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) - \frac{\sigma S \mathcal{N}'(d_1)}{r\sqrt{T-t}} = -Ke^{-r(T-t)} \left[ r\mathcal{N}(d_2) + \sigma \frac{\mathcal{N}'(d_2)}{r\sqrt{T-t}} \right]$$